La formula di Taylor col resto di Lagrange.

Sia $P_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n e punto iniziale $c \in]\alpha, \beta[$ relativo alla funzione $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$, $]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, ed ivi dotata di tutte le derivate sino all'ordine n. Si ha cioè

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-c)^n =$$

$$= \frac{f^{(0)}(c)}{0!}(x-c)^0 + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-c)^n,$$

ovvero, in forma più compatta,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Per costruzione si ha $D^{(k)}f(c) = D^{(k)}P_n(c)$ per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, ovvero, come si suol dire, f e P_n hanno un *contatto di ordine* n nel punto c.

Se f fosse un polinomio dovrebbe aversi necessariamente $f = P_n$ in $]\alpha, \beta[$. In generale però la differenza $f - P_n$ non è nulla. Il teorema che segue stima pertanto, per ogni $x \in]\alpha, \beta[$ fissato arbitrariamente, la differenza $f(x) - P_n(x)$ in termini della derivata di ordine $n+1$ della f calcolata in un opportuno punto di $]\alpha, \beta[$, sempre che questa esista.

Si ha così la *formula di Taylor*, espressa dal seguente teorema.

Teorema. *Siano $n \in \mathbb{N}_0$, $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ dotata di derivate continue sino all'ordine n, $c \in]\alpha, \beta[$ fissato a piacere; supponiamo infine che esista $f^{(n+1)}(x)$ in ogni punto $x \in]\alpha, \beta[$ distinto da c. Allora per ogni $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq c$, esiste ξ interno all'intervallo di estremi c ed x per il quale si ha*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Osservazione. Per $n = 0$ la formula di Taylor si riduce al teorema di Lagrange.

Dimostrazione. Osserviamo subito che la tesi continua banalmente a sussistere anche quando $x = c$, potendo scegliere come punto ξ un qualsivoglia punto interno ad $]\alpha, \beta[$ e distinto da c. Fissiamo dunque arbitrariamente $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq c$. Se poniamo

$$\text{(R)} \qquad a = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

si deve provare che esiste ξ interno all'intervallo di estremi c ed x per il quale risulta $a = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}(x-c)^{n+1}$. A tale scopo definiamo una funzione $I \ni t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}$ ponendo, per ogni punto $t \in]\alpha, \beta[$,

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - a\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}.$$

In pratica la φ si ottiene dalla (R) mettendo la variabile t al posto del numero fissato c, e sottraendo la quantità $a\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$.

Chiaramente φ è continua in $]\alpha, \beta[$ e dotata in ogni punto $t \in]\alpha, \beta[$ distinto da c di derivata prima $\varphi'(t)$. Osserviamo ora che si ha $\varphi(x) = \varphi(c) = 0$. Infatti

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k - a\,\frac{(x-x)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} = \\ &= f(x) - f(x) - f'(x)(x-x) - f''(x)(x-x)^2 - \cdots - f^{(n)}(x)(x-x)^n = 0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi(c) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k - a\,\frac{(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} = \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k - a = 0\end{aligned}$$

per la (R). Per il teorema di Rolle esiste così un punto ξ interno all'intervallo di estremi c ed x tale che $\varphi'(\xi) = 0$. Calcoliamo, per $t \in]\alpha, \beta[$, $t \neq c$, $\varphi'(t)$. Si ha

$$\varphi'(t) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - a\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} \right)' =$$

$$= 0 - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)' + \\ - \left(a\,(n+1)\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} \right)' =$$

$$= -\underbrace{f'(t)}_{\bullet} - \Big[\underbrace{f''(t)(x-t)}_{\bullet\bullet} - \underbrace{f'(t)}_{\bullet} \Big] - \Big[\underbrace{\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2}_{\bullet\bullet\bullet} - \underbrace{\frac{f''(t)}{2}\,2\,(x-t)}_{\bullet\bullet} \Big] - \Big[\underbrace{\frac{f''''(t)}{3!}(x-t)^3}_{\bullet\bullet\bullet\bullet} + \\ - \underbrace{\frac{f'''(t)}{3!}\,3\,(x-t)^2}_{\bullet\bullet\bullet} \Big] - \cdots - \Big[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \underbrace{\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\,n\,(x-t)^{n-1}}_{\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{\text{n–volte}}} \Big] + a\,(n+1)\,\frac{(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}} =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + a\,(n+1)\,\frac{(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}} =$$

$$= -\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}} \left[\frac{f^{(n+1)}(t)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} - a \right].$$

Così da

$$\varphi'(\xi) = -\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}} \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} - a \right] = 0$$

segue necessariamente

$$a = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

che completa la dimostrazione. □

Osservazione. Il teorema continua ovviamente a sussistere se supponiamo direttamente che f sia dotata in $]\alpha, \beta[$ di derivate sino all'ordine $n+1$.