Programma di Analisi II (Prof. Zamboni)

a.a. 2005-2006

ATTENZIONE !!!

Questo è una programma <u>molto dettagliato</u> del programma di Analisi II del Prof. Zamboni, basato sulle lezioni svolte nell'a.a. 2005/2006. Il programma è utile in fase di studio e di ripasso, poiché comprende suggerimenti per ricordare le dimostrazioni e include gli esempi principali agli argomenti trattati (spesso oggetto di esame al colloquio). Il programma <u>NON É UFFICIALE</u>: è stato scritto da uno studente, dunque potrebbe contenere errori e/o dimenticanze. Quindi, usatelo con intelligenza. :)

LEGENDA

* Senza dimostrazione. => Implica. !=> NON implica. DEF definizione. TEO teorema. DIM dimostrazione.

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

DEF successione di funzioni, insieme di convergenza, funzione limite, convergenza uniforme. CNS per la convergenza uniforme. Esempio: x^n. Criteri di Cauchy (puntuale ed uniforme). Conseguenze della conv uniforme: TEO dello scambio dei limiti (DIM, sfruttare Cr di Cauchy), TEO di continuità (DIM, sfruttare il precedente) Controesempio, il viceversa non vale. TEO di Integrabilità (DIM, sfruttare Th della Media). Controesempio (1. la convergenza uniforme è necessaria - triang 1/n*n, 2. il viceversa non vale triang 1/n*1). TEO di scambio del limite con la derivata*. Controesempi.

SERIE DI FUNZIONI

DEF serie di funzioni, insieme di convergenza. Esempio: serie geometrica x^(n-1). Criteri di Cauchy per le serie (puntuale e uniforme). DEF convergenza totale, TEO di Weierstrass (DIM, usare Cauchy), CNS Convergenza totale (DIM). Esempio: serie logaritmica x^n/n. TEO di continuità (DIM). Esempio: f di riemann 1/n^x. TEO di integrabilità*. Esempio: serie geometrica (-log(1-x)). TEO di derivabilità*. Applicazioni: serie esponenziale. DEF serie di potenze, insieme di convergenza. LEMMA di Abel (DIM). TEO del raggio (DIM). TEO di Abel*. Teo di Cauchy-Hadamard (DIM). COROL D'alembert. TEO funzione somma di una s.d.p. (DIM Sfruttare 1. Teo di continuità 2. Cauchy-Adamard 3. teo di derivabilità). Serie di Taylor associata ad f. Esempio: f=0 in 0; e^(-1/x²) in R-0. Condizioni sufficienti ma non necessarie per l'analiticità. Serie di Fourier. DEF funzione periodica, periodo, serie trigonometrica. Cambio periodo da t a 2. TEO legame f(x) con a_k b_k. DEF continua a tratti. Implica sviluppabilità secondo Fourier. DEF Condizione di Dirichlet. TEO per condizione di Dirichlet. Esempio: g(x)=x in [0,pigr[; 0 in [pigr,2pigr[. Formule di Eulero, serie bilatera.

SPAZI METRICI

DEF Spazio metrico. Esempi di metrica (discreta, euclidea in R, R², R^n, del massimo). Metrica per funzioni (lagrangiana, integrale). DEF metriche equivalenti. Relazioni tra metriche. DEF intorno sferico aperto, punto interno, esterno, di frontiera, di accumulazione, isoltato, insieme aperto, chiuso, diametro, chiusura, dominio, insieme denso, discreto, perfetto. DEF Spazio normato. La metrica induce una distanza. La distanza induce una metrica solo se sono verificate traslazione e dilatazione. DEF Convergenza di successioni. Convergente => Cauchy. <= non vale sempre. DEF spazio completo. Esempio: R^n (DIM). Metrica lagrangiana e conv unif. DEF insieme (sequenzialmente) compatto. Compatto implica chiuso e limitato. <= vale solo per R e R^n (Heine-Borel). Controesempio: (1+1/n)^n in Q. DEF segmento in R^n, insieme connesso, poligonale in R^n, insieme connesso per poligonale. Connesso per poligonale => connesso*. <= vale solo se l'insieme è aperto. Controesempio: circonferenza.

FUNZIONI IN SPAZI METRICI

Limite di una funzione in un generico spazio metrico, trasposizione in R^n. DEF f vettoriale (R^n->R^m). CNS convergenza di una f vettoriale in R^n->R^m (componenti). Due CNS di convergenza di f vettoriale (1. restrizione 2. successione). Esempio: funzione non convergente in 0, (restrizione e successione). DEF Continuità per punti isolati e punti di accumulazione. Continuità in f vettoriali. TEO Continuità di funzioni composte continue*. TEO permanenza del segno (DIM, sfruttare la la continuità di f, la definizione di limite e scegliere epsilon=f(x_0)/2). TEO esistenza degli zeri (DIM, dimostrare che A f(x)>0 e B f(x)<0 sarebbero aperti non vuoti e che X sarebbe non connesso, contro l'ipotesi). TEO Weierstrass (DIM, sfruttare la compattezza di X). DEF f uniformemente continua. Unif continua implica continua. Il viceversa vale solo se il dominio è un compatto. DEF f lipschitziana. Lipschitziana implica unif continua. Il viceversa non vale. Controesempio: sqrt(x) [0,+oo]*. DEF Contrazione di f. TEO Banach-Caccioppoli*.

CALCOLO DIFFERENZIALE

DEF rapporto incrementale, derivata direzionale, derivata parziale, vettore gradiente. Esempio derivabilità ! => continuità (f=1 in $y<=x^2$ e $y>=2x^2$; 0 in $x^2<y<2x^2$). DEF differenziabilità e differenziale. Differenziabilità => derivabilità (DIM). Unicità di L(h). Esempio: derivabilità !=> differenziabilità (f=0 in (0,0); $(x^2y)/(x^2+y^2)$ in R^2-(0,0)) Differenziabilità => continuità (DIM). Non vale il viceversa. TEO Differenziale totale (esistenza delle derivate parziali e loro continuità => differenziabilità).* Derivata di composizione di funzioni (mono e multidimensionale). TEO del gradiente nullo (DIM, sfruttare la connessione di A). DEF insieme conico, f positivamente omogenea di grado alpha. Esempi: norma, $f=(xy)/(x^2+y^2)$. Identità di Eulero (DIM). Derivate successive, derivate parziali miste e pure, matrice Hessiana. Teorema di Schwarz*. Teorema di Lagrange per f a più variabili, Formula di Taylor arrestato al I ordine. DEF insieme convesso, f convessa. Esempio di f convessa: norma. TEO di Fermat (DIM). DEF punto stazionario. Esempio: $f=(y-x^2)(y-2x^2)$ (0,0) pto stazionario ma non è di minimo. DEF Forme quadratiche, autovalori. Condizione necessaria affinchè x_0 sia punto di estr relativo. Il viceversa non vale Controesempio: $f=x^2-y^4$. Condizione sufficiente affinchè x_o sia punto di estremo relativo (DIM). DEF f implicite in R^2. Esempio $f(x,y)=x^2+y^2-1$. TEO del Dini in R^2 (DIM). Se esiste anche la derivata risp a x... Esempio: xe^y+ye^x. DEF f vettoriali. Derivabilità e differenziabilità di f vettoriali. DEF matrice Jacobiana.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEF equazione differenziale di ordine n, forma normale, soluzione, sistema di n eq differenziali del I ordine in m f incognite, soluzioni. Equivalenza di una f di ordine n-1 con un sistema di n eq diff di I ordine in n f incognite. TEO di esistenza e unicità in piccolo. Controesempi: g(x)= x/|x| in R-0; 0 in 0 (non continua). y'=(non lipschitziana). Esempio in cui vale il th in piccolo: $y'=y^2$. TEO di esistenza e unicità in grande* (della striscia). Eq a variabili separabili. DEF. Sistemi di n eq differenziali, forma matriciale. TEO Le soluzioni di un sistema sono globali (DIM, usare teo striscia). Sistema omogeneo. Insieme delle soluzioni Z. TEO Z è uno spazio vettoriale e dim(Z)=n (DIM). DEF Condizione di lineare indipendenza. LEMMA Se per qualche x esiste una c.l. delle soluzioni nulla, è nulla in tutto (a,b) (DIM). TEO CNS affinchè esista una c.l. nulla di soluz l.i. è che essa sia nulla in un punto (DIM). DEF Matrice Wronskiana. TEO CNS affinchè siano un sistema fondamentale di soluzioni è che esista x^ in (a,b) t.c. det W(x^)!=0 *. TEO L'insieme delle soluz del sistema non omogeneo è uguale all'insieme delle soluz del sistema omogeneo più una soluzione particolare (DIM). Variazione delle costanti di Lagrange. Eq lineari del I ordine, di Bernoulli, a coefficienti omogenei, omogenee generalizzate. Equazioni lineari di ordine n.

INTEGRALI

Insiemi misurabili: 1) Rettangoli; 2) Plurirettangoli; 3) Limitati, aperti, non vuoti (Dim sup e 0<|A|<+oo); 4) Compatti (0<=|A|<+oo) (esempi di misura nulla), 5) Limitato qualunque, 6) Arbitrari (successione "invadente"), vale anche per i limitati. DEF Classe degli insiemi misurabili. Proprietà degli insiemi misurabili. Dimostrazione di |Q|=0. DEF f misurabili. f misurabili in un insieme. Continua=> misurabile. Continua q.o. => misurabile. Esempio: f di Dirichlet. DEF Integrale di Lebesgue (Decomposizione, insiemi di livello, somma sup e inf, sono classi separate, si ha che sups(D)=infS(D) [DIM]). Allegerimento ipotesi. 1) f limitata, aggiungiamo f>=0. DEF Troncatura di f. 2) f>=0. 3) |E|<+oo Aggiungiamo f>=0 4) f>=0. Alcune proprietà (linearità, positività, monotonia, confronto). Integrale di f in un insieme di misura nulla. Integrale d una funzione nulla q.o.. Integrale di f=g q.o (DIM). TEO della convergenza dominata*. Esempio: $(nx)/(1+n^2x^2)$ o x^n. TEO di convergenza monotona* (Beppo- Levi). Conseguenze di B.L.: TEO di integrazione per serie (DIM). TEO di invadenza (DIM). Sezione e proiezione. TEO di Fubini (integrali iterati). TEO di Tonelli. Criterio di sommabilità. Cambi di variabile. Matrice Jacobiana. DEF Dominio normale. Sua compattezza => misurabilità.

CURVE e FORME DIFFERENZIALI

DEF curva, punto iniziale e finale, curva chiusa, semplice, piana, di Jordan, regolare, regolare a tratti. Esempio: (t,|t|,0). Cambi di parametrizzazione. DEF curve equivalenti. DEF curva rettificabile. Regolare implica rettificabile. Misura di una curva regolare e di una ad essa equivalente. DEF curva unione. Unione di curve rettificabile è rettificabile. Curva regolare a tratti = Unione di curve regolari => Rettificabile. DEF integrl curvilineo di I specie (di una f lungo una curva). Prorpietà: linearità, "somma" rispetto a curva unione, indipendenza dalla parametrizzazione. DEF forme differenziali, integrale curvilineo di II specie (di una forma differenziale lungo una curva). DEF forme diff esatte. V e U potenziali della stessa forma diff => V=U+c (DIM, usare TEO grad nullo). Consenguenze esattezza: indipendenza dell'integrale dal percorso; nullità dell'integrale lungo una curva chiusa. DEF cammino. Cambi di parametrizzazione. DEF forma differenziale chiusa. Esatta => chiusa, il viceversa vale solo in un insieme stellato. DEF insieme stellato. Integrale di II specie lungo una poligonale. DEF insieme semplicemente connesso. Criterio di esattezza in un insieme sempl connesso privato di un punto. Equazioni differenziali esatte.