Tesina di “Tecniche di Ottimizzazione per il Controllo”

Studente: Alberto Bruccini

Testo:

Dato il sistema lineare tempo-invariante passivo descritto dalla f.d.t.

G(s) = $\frac{11.7s^4+224.4\,s^3+1409s^2+3129s+1596}{s^5+23.8s^4+197s^3+676.3s^2+896.6s+302.4}$, progettare un modello di ordine ridotto che preservi la proprietà di passività.

Risoluzione:

Il sistema è del quinto ordine; in forma canonica di controllo si può scrivere:

```
A =

         0    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0
         0         0         0    1.0000         0
         0         0         0         0    1.0000
 -302.4000 -896.6000 -676.3000 -197.0000  -23.8000


B =
                          C =
     0
     0                      1.0e+003 *
     0
     0                        1.5960    3.1290    1.4090    0.2244    0.0117
     1

sistema=ss(A,B,C,0)
```

Poiché D=0, per ricavare un sistema di ordine ridotto che preservi la proprietà di passività non è possibile utilizzare il metodo che prevede di trovare la realizzazione in cui la soluzione dell'equazione di Riccati derivata dal Positive Real Lemma e quella della sua duale siano uguali:

$$PA + A^T P = -(-PB + C^T)(D + D^T)^{-1}(-PB + C^T)^T$$

$$\pi A^T + A\pi = -(-\pi C^T + B)(D + D^T)^{-1}(-\pi C^T + B)^T$$

Per cui è necessario trovare la forma bilanciata a catena aperta, e verificare successivamente che il sistema ridotto sia rimasto passivo. Il sistema è asintoticamente stabile, controllabile ed osservabile, come è possibile notare dagli auto valori di A e dal rango di Mc ed Mo:

```
>> eig(A)

ans =

   -9.9730
   -7.2426
   -3.9813
   -2.1030
   -0.5000
```

```
>> rank(ctrb(A,B))

ans =

     5
```

```
>> rank(obsv(A,C))

ans =

     5
```

E quindi è possibile calcolare la forma bilanciata a catena aperta:

```
[sistemabil,G]=balreal(sistema)
```

I due gramiani sono ovviamente uguali:

```
>> gram(sistemabil,'c')

ans =

    2.2504   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.3365   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0500   -0.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0020    0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000

>> gram(sistemabil,'o')

ans =

    2.2504    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000    0.3365    0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0500    0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0020    0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
```

Poiché il sistema è asintoticamente stabile, controllabile ed osservabile, W_c^2e W_o^2 sono matrici definite positive anche se il valore singolare più piccolo sembra essere 0 (in realtà è piccolissimo ma positivo).

Scegliamo r=3; applichiamo il metodo del troncamento diretto per trovare il sistema in forma ridotta:

```
sistemaridotto=ss(sistemabil.a(1:r,1:r),sistemabil.b(1:r),sistemabil.c(1:
r),sistemabil.d)
```

L'errore tra il sistema originale e il sistema ridotto è dato da:

```
>> normhinf(tf(sistema)-tf(sistemaridotto))

ans =

    0.0040
```

Per vedere se anche il sistema ridotto è passivo, facciamo delle considerazioni sulla sua funzione di trasferimento:

```
>> tf(sistemaridotto)

Transfer function:
   11.68 s^2 + 81.35 s + 54.44
---------------------------------
s^3 + 11.51 s^2 + 25.72 s + 10.32
```

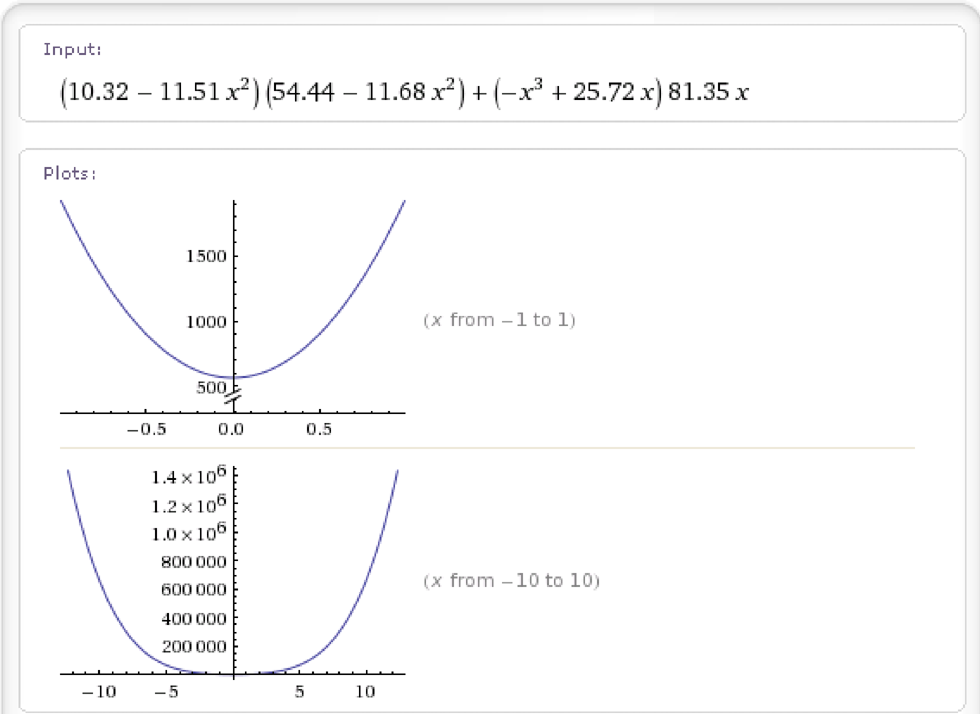
I poli sono:

```
>> pole(tf(sistemaridotto))

ans =

   -8.6796
   -2.3119
   -0.5144
```

Rimane da verificare che $Re\{Z(j\omega)\} \geq 0\ \forall\omega$; dopo alcuni calcoli si trova:

$G(j\omega) = \dfrac{54.44-11.68\omega^2+j81.35\omega}{10.32-11.51\omega^2+j(-\omega^3+25.72\omega)}$; da cui:

$$Re\{G(j\omega)\} = \frac{(10.32 - 11.51\omega^2)(54.44 - 11.68\omega^2) + (-\omega^3 + 25.72\omega) * 81.35\omega}{(\dots)^2 + (\dots)^2} > 0 \; \forall\omega$$



Per cui il sistema ridotto è ancora reale positivo.

Troviamo ora il modello di ordine ridotto utilizzando il metodo della perturbazione singolare, e confrontiamo i risultati ottenuti; si ha:

```
A11=sistemabil.a(1:r,1:r)

A12=sistemabil.a(1:r,r+1:n)

A21=sistemabil.a(r+1:n,1:r)

A22=sistemabil.a(r+1:n,r+1:n)

B1=sistemabil.b(1:r)

B2=sistemabil.b(r+1:n)

C1=sistemabil.c(1:r)

C2=sistemabil.c(r+1:n)
```

Le matrici di stato del nuovo sistema ridotto saranno:

$$A^* = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$B^* = -A_{12}A_{22}^{-1}B_2 + B_1$$

$$C^* = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$D^* = -C_2A_{22}^{-1}B_2$$

```
Astar=A11-A12*inv(A22)*A21

Bstar=-A12*inv(A22)*B2+B1

Cstar=C1-C2*inv(A22)*A21

Dstar=-C2*inv(A22)*B2
```

```
sistemaridotto2=ss(Astar,Bstar,Cstar,Dstar)
```

L'errore risulta identico al caso del troncamento diretto:

```
>> errore2=normhinf(tf(sistema)-tf(sistemaridotto2))

errore2 =

    0.0040
```

In questo caso, visto che D≠0, possiamo verificare che il sistema ridotto sia passivo verificando che l'equazione di Riccati associata al Positive Real Lemma dia una soluzione definita positiva:

$$P(A - B(D + D^T)^{-1}C) + (A^T - C^T(D + D^T)^{-1}B^T)P + PB(D + D^T)^{-1}B^TP + C^T(D + D^T)^{-1}C = 0$$

```
Pstar=are(Astar-Bstar*inv(Dstar+Dstar')*Cstar, -
Bstar*inv(Dstar+Dstar')*Bstar', Cstar'*inv(Dstar+Dstar')*Cstar)
```

Si ha:

```
Pstar =

    0.7818    0.2750    0.1400
    0.2750    0.2124    0.1077
    0.1400    0.1077    0.0901
```

Pstar è simmetrica, quindi per essere definita positiva deve avere tutti gli autovalori positivi:

```
>> eig(Pstar)

ans =

    0.9276
    0.1301
    0.0266
```

Anche procedendo col metodo della perturbazione singolare, come previsto, il sistema ridotto risulta reale positivo.